MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT
ET DES TRANSPORTS

CONCOURS COMMUN 1993
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

COMPOSITION COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

Premier Problème

Notations :

n est un entier fixe, supérieur ou égal à 3.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble, noté aussi $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, des matrices unicolonnes à n lignes, et à coefficients réels ; par $\mathcal{M}$, noté aussi $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels; par $\mathbf{I}$ la matrice unité d'ordre n. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$.

A tout élément $\mathbf{X}$ de $\mathcal{E}$, on peut associer la matrice ligne notée ${}^t\mathbf{X}$, dont les coefficients sont ceux de $\mathbf{X}$, écrits en ligne, et dans le même ordre que ceux de $\mathbf{X}$.

Question I

I.1. m étant un entier relatif, on note $\alpha = \dfrac{m}{2(n+1)}$ et $C(m) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\pi\alpha$.

Montrer que, si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la somme $C(m)$ est égale à 0 ou à -1 selon la parité de m.
Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, que vaut $C(m)$?

I.2. Soit $\mathbf{U}$ l'élément de $\mathcal{M}$ dont les coefficients sont : $u_{p,q} = \sin\dfrac{pq\pi}{n+1}$ $((p,q) \in \{1,\ldots,n\}^2)$.

Calculer $\mathbf{U}^2$. En déduire l'existence de l'inverse de $\mathbf{U}$, qu'on écrira en fonction de n et $\mathbf{U}$.

Question II

Soit $\mathbf{A}$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de rang (i, j) ($i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne) est égal à 1 si $|i-j| = 1$, égal à 0 si $|i-j| \neq 1$

Soit $\mathbf{X}_p$ le $p^{\text{ième}}$ vecteur-colonne de $\mathbf{U}$, pour $p \in \{1,2,\ldots n\}$.

II.1. Démontrer que $\mathbf{X}_p$ est vecteur propre de $\mathbf{A}$. Quelle est la valeur propre associée α_p?

II.2. Les n vecteurs $\mathbf{X}_1,\ldots\mathbf{X}_n$ de $\mathcal{E}$ sont-ils linéairement indépendants ?

II.3. Ecrire une formule donnant une matrice diagonale semblable à $\mathbf{A}$, qui n'utilise que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{U}$.

Question III

Soit $\mathbf{T}$ l'élément de $\mathcal{M}$ dont le coefficient de la $p^{\text{ième}}$ ligne $q^{\text{ième}}$ colonne est

$$t_{p,q} = \sin\frac{p(2q-1)\pi}{2n+1}$$

Soit $\mathbf{B}$ la matrice (d'ordre n) dont le coefficient $b_{i,j}$ de rang (i, j) est donné par :

$b_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$; $b_{n,n} = 1$; $b_{i,j} = 0$ dans tous les autres cas.

Soit $\mathbf{Y}_q$ le $q^{\text{ième}}$ vecteur colonne de $\mathbf{T}$, pour $q \in \{1,2,\ldots n\}$.

III.1. Démontrer que $\mathbf{Y}_q$ est un vecteur propre de $\mathbf{B}$. Quelle est la valeur propre associée β_q ?

III.2. Les n vecteurs $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots\mathbf{Y}_n$, de $\mathcal{E}$ sont-ils linéairement indépendants ?

Question IV

IV.1. Aux vecteurs propres $\mathbf{X}_p$ $(1 \leq p \leq n)$ de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{Y}_q$ $(1 \leq q \leq n)$ de $\mathbf{B}$ on associe la matrice $\mathbf{M}_{p,q} = \mathbf{X}_p {}^t\mathbf{Y}_q$. Peut-on avoir $\mathbf{M}_{p,q} = \mathbf{0}$?

IV.2. La famille des n^2 matrices $\left(\mathbf{M}_{pq}\right)_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}}$ est elle libre dans l'espace $\mathcal{M}$?

Question V

V.1. Soit Φ l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par $\forall \mathbf{M} \in \mathcal{M}$, $\Phi(\mathbf{M}) = \mathbf{AM} - \mathbf{MB}$.
Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}$, dont chaque matrice $\mathbf{M}_{p,q}$ (p et $q \in \{1,2,....n\}$) est vecteur propre. Quelle est la valeur propre associée à $\mathbf{M}_{p,q}$?

V.2. Φ a-t-il d'autres valeurs propres que celles de la liste précédente ?

Deuxième Problème

Préambule

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $R \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble $B_n(R) = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2 \right\}$, est appelé aussi " hyperboule de rayon R, dans l'espace $\mathbb{R}^n$ ".
Le "volume", noté $V_n(R)$ de $B_n(R)$ est défini par l'intégrale multiple, d'ordre n :

$$\overbrace{\int\int....\int}^{n}_{B_n(R)} dx_1 dx_2 ..dx_n$$

On admettra que les méthodes de calcul des intégrales doubles ou triples peuvent se généraliser à une telle intégrale multiple d'ordre n, pour n>3, en particulier l'intégration "par tranches".

Question I

I.1. Calculer $V_1(R)$, $V_2(R)$, $V_3(R)$.

I.2. a. Etablir que, pour tout $n \geq 2$, $V_n(1) = 2\int_0^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right) dx_1$

b. Exprimer, pour $n \geq 1$, $V_n(R)$ en fonction de R, n, et $V_n(1)$.

c. Montrer que, pour $n \geq 2$, $V_n(1) = 2V_{n-1}(1).I_n$ où $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$

On pourra admettre cette dernière relation.

Question II

II.1. Pour n entier naturel quelconque, on veut calculer I_n.

a. Donner une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}, pour $n \geq 2$.

b. Calculer I_0, I_1, puis exprimer I_n au moyen de factorielles.

II.2. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer le produit $I_{2n}I_{2n+1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

II.3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = x^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^n t.dt$

a. Déterminer le domaine de convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

b. Calculer la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ pour les valeurs réelles de x telles que cette série converge.

Question III

Les notations sont celles de la première question.

III.1. a. Exprimer $V_{2n}(1)$ en fonction de $V_{2n-2}(1)$, pour $n \geq 2$. En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de $V_{2n}(1)$ en fonction de n et donner la valeur de $V_4(1)$.

b. Déterminer de même l'expression de $V_{2n+1}(1)$, pour $n \geq 0$

III.2. On considère maintenant $\mathcal{C}_n = [-1, 1]^n$ (l'hypercube circonscrit à l'hyperboule $B_n(1)$). Donner son volume C_n en fonction de n.

III.3. Pour $n \geq 1$, on appelle B'_n l'hyperboule circonscrite à l'hypercube $\mathcal{C}_n$; elle est définie par $B'_n = B_n(\sqrt{n})$ (le rayon ρ_n de B'_n est $\sqrt{n}$).

a. Calculer son volume $V_n(\rho_n)$. (Considérer les deux cas n pair et n impair).On pourra noter W_n ce volume.

b. Préciser pour $n \in \{1,2,3,4\}$, les valeurs de $V_n(\rho_n) = W_n$.

III.4. On appelle α_n le "taux de remplissage de l'hypercube du **2.** par l'hyperboule de rayon 1" , c'est à dire le quotient $\frac{V_n(1)}{C_n}$.

a. Dans les deux cas n pair, n impair, déterminer α_n. (on écrira : α_{2p} et α_{2p+1}).

b. Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de α_n pour $n \in \{1,2,3,4\}$.

III.5. On appelle β_n le "taux de remplissage de l'hyperboule B'_n du **3.** par l'hypercube du **2.**" c'est à dire le quotient $\frac{C_n}{V_n(\rho_n)} = \frac{C_n}{W_n}$.

a. Déterminer β_n (de même β_{2n} et β_{2n+1}).

b. Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de β_n pour $n \in \{1,2,3,4\}$.

III.6. Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont une limite nulle.

FIN